Питання до заліку з математичного аналізу (Ій семестр)

1. **Індуктивні множини та метод математичної індукції.**

Числова множина А називається індиктувною, якщо для кожного х є А => х+1 є А;

Приклади: множина всіх додатніх дійсних чисел; множина всіх раціональних чисел; множина всіх невід’ємних чисел; множина цілих чисел; А={x є R|x > -5}.

Теор

ема: непустий перетин будь-якої множини індуктивних множин є індуктивною множиною.

Визначення: множиною натуральних чисел називають перетин індуктивних числових множин, що містять число 1. Найменша індуктивна множина, що містить число 1.

З визначення випливає метод математичної індукції.

Математи́чна інду́кція — застосування *принципу індукції* для [доведення теорем](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC) в [математиці](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0). Зазвичай полягає в доведенні вірності твердження стосовно одного з[натуральних чисел](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%96_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), а потім всіх наступних.

Нехай F(n) деяке твердження відносно натуральних чисел, якщо

1. Воно має місце для n=1;
2. З припущення що, F(k) – є місце, випливає, що F(k+1) теж має місце.

Звідси висновок , що F(n) має місце для будь-яких n є N

Зауваження: Якщо пункт 1 замінити на перевірку n=n0 , то при виконанні пункту 2 робимо висновок, що F(n) має місцe для всіх n ≥ n0.

1. **Визначення супремуму множини А (два варіанта).**

Супремум — это наименьшая из всех верхних граней. Обозначается \sup X .

Наименьшее число, ограничивающее сверху некоторое множество чисел называется точной верхней гранью или супремумом этого множества

Число S назив. Sup A, якщо 1)для будь-якого a A a<=S;

2)для будь-якого S1<S a\* A : a\*>S1;

1. **Визначення інфінуму множини А (два варіанта).**

Инфимум — это наибольшая из всех нижних граней. Обозначается \inf X .

Двойственным образом наибольшее число ограничивающее снизу некоторое множество чисел называется точной нижней гранью или инфинумом этого множества.

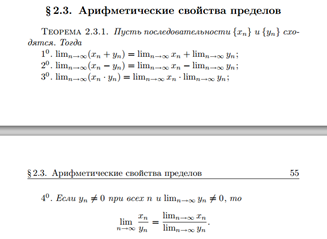
Число I назив. Inf A, якщо 1)для будь-якого I<=a a A

2)для будь-якого I1<I a\* A : a\*<I1;

1. **Границя числової послідовності: визначення, основні властивості.**

А називають границею послідовності {An}(позначають A=limAn) якщо для будь-якого U(A)існує N0 : для будь-яких n ≥ N0 => An є U(A).

1. **Арифметичні властивості границі послідовності.**



1. **Нескінченно мала, її властивості.**

Произведение бесконечно малых есть бесконечно малая.Частное двух бесконечно малых ***f1/f2*** являет собой неопределенность вида «0/0».Если ***f(х)*** при ***х→х0*** есть бесконечно малая, то***1/f(х)*** в том же предельном переходе есть бесконечно большая.Если при  ***х→х0***Предел функции. Межа функціїто разность ***f(х)-A=α***, где ***α*** – бесконечно малая.

Властивості нескінченно малих.

1. Сума нескінченно малих є нескінченно мала.

2. Добуток нескінченно малих є нескінченно мала.

3. Добуток нескінченно малої і обмеженої в околі точки [x_0](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=x_0) є нескінченно мала.

4. Обернена до нескінченно малої є нескінченно велика, тобто величина, що прямує до нескінченності. І навпаки, обернена до нескінченно великої є нескінченно мала.

[\alpha(x)\to 0\;\;\Rightarrow\;\;\frac{1}{\alpha(x)}\to\infty](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\alpha(x)\to%200\;\;\Rightarrow\;\;\frac%7b1%7d%7b\alpha(x)%7d\to\infty)

[ \beta(x)\to \infty\;\;\Rightarrow\;\;\frac{1}{\beta(x)}\to0](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=%20\beta(x)\to%20\infty\;\;\Rightarrow\;\;\frac%7b1%7d%7b\beta(x)%7d\to0)

1. **Нескінченно велика, її властивості.**

Сумма бесконечно больших функций одного знака есть бесконечно большая.

Произведение бесконечно больших есть бесконечно большая.

Разность двух бесконечно больших функций одного знака есть неопределенность вида «∞-∞».

1. **Підпослідовність, визначення верхньої і нижньої границь послідовності.**

Нехай {An} деяка послідовність n1<n2<n3<….зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді {Ank}|k є N називають підпослідовністю послідовності {An}.

Визначення : Верхньою (\varlimsup_{n \to \infty} x_n) границею послідовності {An} називають її найбільша часткова границя, а нижню(\varliminf_{n \to \infty} x_n) - найменша з часткових границь.

1. **Критерій Коші існування границі послідовності.**

Визначення послідовності {An} фундомендальною, якщо для будь-якого існує таке ,що для будь-якого **ε>b** існує N**ε таке, що для будь-якого m,n ≥ Nε =>**

**|An-Am|<ε**

Критерій Коші

Існує lim An=A є R <=> {An}-фундаментальна.

1. **Принцип Коші-Кантора (лема про вкладені відрізки).**

Для кожної послідовності {In} вкладених відрізків існує спільна точка. Якщо в цій

послідовності є відрізки, довжина, яких менша будь-якого додатнього числа, то така точка єдина.

1. **Принцип Бореля-Лебега (лема про скінченне підпокриття).**

В усякій системі підінтервалів, що покриває відрізок від [a,b] можна виділити скінченне підпокриття.

1. **Гранична точка множини та принцип Больцано-Вейерштрасса.**

Точка A є R називається граничною точкою для множини x c R , якщо будь-який окіл U(a) точка А містить множину точок X.

Лема про граничну точку: Всяка нескінченна обмежена числова множина має граничну точку.

1. **Полярна система координат.**

Полярна система координат — двовимірна система координат, в якій кожна точка на площині визначається двома числами — кутом та відстанню. Полярна система координат особливо корисна у випадках, коли відношення між точками найпростіше зобразити у вигляді відстаней та кутів.

Полярна система координат задається променем, який називають нульовим або полярною віссю. Точка, з якої виходить цей промінь називається початком координат або полюсом. Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальною та кутовою.

1. **Комплексні числа, різні форми запису.**

Визначення.Комплексним числом ***z*** називається вираз , де *a* і *b* – дійсні числа, *i* – уявна одиниця, що визначається співвідношенням:



При цьому число *a* називається дійсною частиною числа *z* (*a =* Re *z*), а *b*- уявноючастиною (*b =* Im *z*). Якщо *a =Re z =0,* то число *z* буде чисто уявним, якщо *b = Im z = 0*, то число *z* буде дійсним.  - алгебраїчна форма комплексного числа

z=r(\cos \varphi+i\cdot\sin \varphi) - тригонометрична форма комплексного числа

http://edu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_p_math1/files.book&file=p_math1_88.files/image8.gif - показникова форма комплексного числа

1. **Формула Ейлера, формула Муавра.**

 - формула Муавра.

де *n –* ціле додатне число.

Формулу Муавра можна використати для знаходження тригонометричних функцій подвійного, потрійного й т.д. кутів. Цей вираз називається формулою Муавра.

Формула Ейлера — співвідношення, що пов'язує комплексну експоненту з тригонометричними функціями. Названа на честь Леонарда Ейлера, який її запропонував. Формула Ейлера стверджує, що для будь-якого дійсного числа x виконується рівність:  - формула Ейлера, де e — основа натурального логарифма, i — уявна одиниця. Формула залишається вірною також для комплексного аргументу ɤ.

Z=rei

1. **Корінь n порядку з комплексного числа.**

Число W називається коренем n-го порядка з комплексного числа z, якщо

Знайдемо формулу для Wn=z, якщо нам відомо Z;

Нехай Z=R(cosɤ+isinɤ)

Позначимо W=|W|(cosɤ+isinɤ);

За визначення, якщо Wn=z ,але Wn={ф. Муавра}=|W|n(cos*n*ɤ+isin*n*ɤ) => маємо рівняння:|W|n(*cosnɤ*+*isinnɤ*)= R(cosɤ+isinɤ)

Два комплексних числа співпадають, але кути відрізняются на 2kп

|w|n=z |w|=n√z

⬄ *ɤ=ɤ+2k*п

n*ɤ=ɤ+2k*п

k=0,1,2,…,(n-1).



1. **Різні форми визначення границі функції.**

## Определения

Рассмотрим [функцию](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)" \o "Функция (математика)) f \left( x \right), определённую на некотором множестве ~X, которое имеет [предельную точку](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0" \o "Предельная точка) ~x_0 (которая, в свою очередь, не обязана ему принадлежать).

### Предел функции по [Гейне](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B5,_%D0%AD%D0%B4%D1%83%D0%B0%D1%80%D0%B4)

Значение ~A называется **пределом** (**предельным значением**) функции f \left( x \right) в точке ~x_0, если для любой [последовательности](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C" \o "Последовательность) точек \left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}, сходящейся к ~x_0, но не содержащей ~x_0 в качестве одного из своих элементов (то есть в проколотой окрестности ~x_0 ), последовательность значений функции \left\{ f \left( x_n \right) \right\}_{n=1}^{\infty}сходится к ~A.[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8#cite_note-ilyin-1)

### Предел функции по [Коши](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%88%D0%B8,_%D0%9E%D0%B3%D1%8E%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BD_%D0%9B%D1%83%D0%B8)

Значение ~A называется **пределом** (**предельным значением**) функции f \left( x \right) в точке ~x_0, если для любого наперёд взятого положительного числа \varepsilon найдётся отвечающее ему положительное число \delta = \delta \left( \varepsilon \right) такое, что для всех аргументов ~x, удовлетворяющих условию 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta, выполняется[неравенство](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) \left| f \left( x \right) - A \right| < \varepsilon.[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8#cite_note-ilyin-1)

\lim_{x \to x_0} f \left( x \right) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 ~ \exists \delta = \delta \left( \varepsilon \right)>0 ~ \forall x \colon 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f \left( x \right) - A \right| < \varepsilon

1. **Теорема про перехід до границі в нерівностях**.

Теорема 1.

Нехай {an}, {bn}, {cn}такі що {an}≤{bn} ≤{cn} для всіx n. Якщо для всіх limn→∞ an= =limn→∞ сn= A то знайдеться limn→∞ bn= A.

Теорема 2.

Якщо для всіх limn→∞αn = aє R, для всіх limn→∞bn = bє R, a<b, то ᴲ N0 такий що для всіх n ≥ N0 =>an<bn.

Наслідок. Якщо існує N0 таке що для всіх n ≥ N0

* + bn˃an  => limn→∞ bn ≥ limn→∞ an
  + bn≥an  => limn→∞ bn ≥ limn→∞ an
  + bn˃a = liman => limbn ≥ liman
  + bn≥a = liman => limn→∞ bn ≥ limn→∞ an

1. **Перша та друга чудові границі.**

1) limx→∞ sin(x)/x = 1

2) limx→∞ (1+1/x)x = e

1. **Визначення о-маленького і О-великого функції.**

Асимптотична нотація великого О, відома також як нотація Ландау -розповсюджена математична нотація для формального запису асимптотичної поведінки функцій. «О» велике. Нехай задані дві комплекснозначні функції f(z) та g(z) визначені в деякій множині D комплексної площини. Тоді говорять, що  f(z) \in  O(g(z)),\,\,\, z \in D,  якщо існує константа K >0, що виконується нерівність |*f(z)*| ≤ K |*g(z)*| для z \in D. «o» маленьке. Нехай f(z) і g(z) дві комплекснозначні функції визначені в деякій множині D комплексної площини замикання якої містить точку z_0. Тоді ми кажемо, що  f(z)=o(g(z))  при  z \to z_0  з  D  якщо для довільного \epsilon >0, як завгодно малого, існує відповідне йому \delta (\epsilon)>0 , що

|f(z)| \le  \epsilon |g(z)|  для z \in D і 0<|z-z_0|< \delta(\epsilon). Тобто, f є меншим за величиною за будь-який малий добуток g для z \in D досить близьких до точки z_0.

1. **Еквівалентні нескінченно малі, теорема про заміну на еквівалентну н.м.**

Если http://www.znannya.org/images/math/lect/lect1-16-pic/lect1663.jpg  то α и ß называются **эквивалентными бесконечно малыми** (при х→x0); это обозначается так: α~ß.

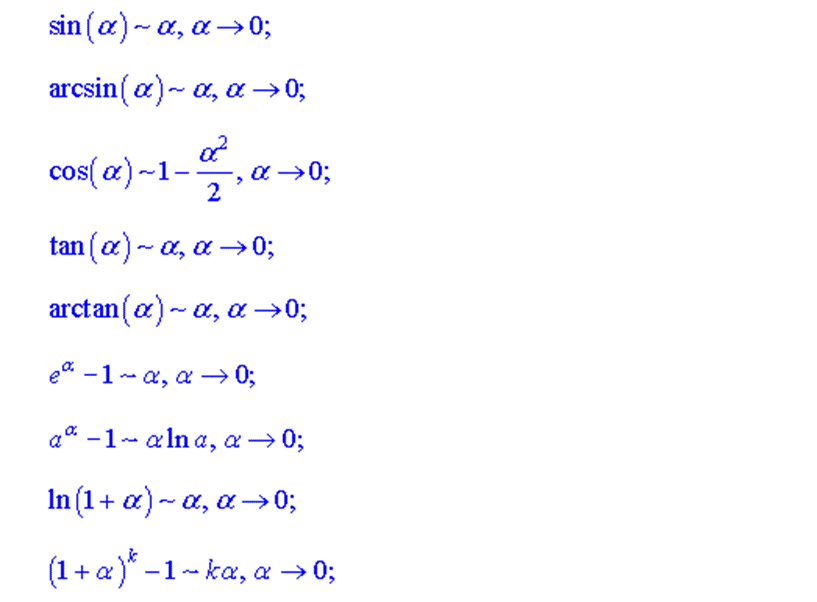
Теорема. Нехай [f \sim f_1](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=f%20\sim%20f_1) а [g \sim g_1](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=g%20\sim%20g_1) при [x\to x_0](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=x\to%20x_0). Тоді

[\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} =\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=\lim\limits_%7bx\to%20x_0%7d\frac%7bf(x)%7d%7bg(x)%7d%20%3D\lim\limits_%7bx\to%20x_0%7d\frac%7bf_1(x)%7d%7bg_1(x)%7d).

Для використання цієї тереми корисним є ланцюжок еквівалентностей при [x\to 0](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=x\to%200)

[x \sim \sin x \sim tg x \sim arcsin x \sim arctg x \sim \ln(1+x) \sim e^x-1](http://alwebra.com.ua/filter/tex/displaytex.php?texexp=x%20\sim%20\sin%20x%20\sim%20tg%20x%20\sim%20arcsin%20x%20\sim%20arctg%20x%20\sim%20\ln(1%2Bx)%20\sim%20e%5ex-1).

1. **Таблиця еквівалентних нескінченно малих.**



1. **Означення неперервності функції. Точки розриву ,їх різновиди.**

Функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image036.png називається неперервною в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image616.pngякщо:

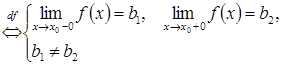
1) вона визначена в цій точці і в деякому її околі;

2) нескінченно малому приростові аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image617.png, або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image618.png.

Означення 2.10. Функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image036.pngназивається неперервною на проміжку, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку точки розриву.

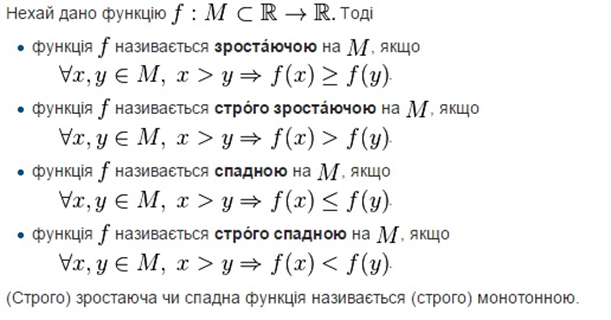
Означення 2.11. Якщо функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image036.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image616.png не є неперервною, то точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image655.png називається точкою розриву функції Означення 2.12. Точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image655.pngназивається точкою розриву функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image036.png першого роду, якщо існують скінченні односторонні границі при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image656.png, але вони не рівні між собою.

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image616.png точка розриву першого роду .

Означення 2.13. Точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image655.png називається точкою розриву функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image036.png другого роду, якщо хоч би одна з односторонніх границь (зліва чи справа) при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image656.png не існує (зокрема, дорівнює нескінченності).

Означення 2.14. Точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image655.png називається точкою усувного розриву функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image036.png, якщо в цій точці виконується умова http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image675.png, але або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image676.png, або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page12_files/image677.png не існує.

1. **Теорема Вейерштрасса про границю монотонної функції.**



Теорема: Для того, щоб зростаюча або не спадна послідовність мала скінченну границю необхідно і достатньо , щоб вона була обмежена зверху. Аналогічно спадна (не зростаюча) послідовність має скінченну границю тоді і тільки тоді, коли вона обмежена знизу.

1. **Теорема Вейерштрасса про неперервну на відрізку функцію.**

Теорема**:** Якщо функція f:[a,b]→R неперервна на [a,b], то вона обмежена на ньому. Існують точки mтаM, в яких f(x) приймає свої найменше і найбільше значення.

1. **Рівномірна неперервність та теорема Кантора.**

Рівномірна неперервність: f: D→R називається рівномірно неперервною на D, якщо для будь-якого ε>0 знайдеться ∂\_ε>0, що ∀x1,x2∈D |x1-x2|< ∂=>|f(x1)-f(x2)|<ε З визначення: якщо функція рівномірно неперервна, то вона і просто неперервна.

Теорема Кантора: Якщо функція неперервна на [a,b], то вона рівномірно неперервна на цьому проміжку.

1. **Визначення диференційованої функції та диференціала, зв’язок з похідною.**

Функція y=y(x) називається диференційованою в т. x0 x ,якщо A=const ,що її приріст в цій точці має вигляд y=A x+0( x) при x 0;

0( x)=( x) x

X 0

Y(x)-y(x0)=A(x-x0)+ (x-x0) при х х0

Диференціалом незалежної змінно х називають її приріст

x= x=x-x0

Таким чином y=Adx

Скінченна границя =

Якщо вона існує, назив. похідною функції y-y0 в т. x0: позначаєм

y’(x)==

1. **Таблиця похідних.**

[[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/%D1%8F1.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/%D1%8F1.gif)](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/%D1%8F1.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/00.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/00.gif)[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/000.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/000.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/1111.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/1111.gif)[[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/100.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/100.gif)](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/100.gif)

[[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/1311.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/1311.gif)](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/1311.gif)[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/132.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/132.gif) 

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif5.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif5.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif6.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif6.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif7.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif7.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif8.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif8.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif9.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif9.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif10.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif10.gif)

[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif11.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif11.gif)

[[http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif13.gif](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif13.gif)](http://matem.com.ua/wp-content/uploads/2011/07/gif13.gif)

1. **Властивості похідних.**

**Константа**

\left({c \cdot f}\right)^\prime = c \cdot f^\prime , де c = \text{const} \,

[**Сума**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D0%BC%D0%B0)**і**[**різниця**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%96%D0%B7%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8F)**похідних**

\left({u + v}\right)' = u' + v'

\left({u - v}\right)' = u' - v'

**Похідна від**[**добутку**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%82%D0%BE%D0%BA)**і**[**частки**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%96%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F)

\left({u*v}\right)' = {u'v+uv'}

\left({u \over v}\right)' = {{u'v-uv'} \over {v^2}}\,, \qquad v \ne 0

**Похідна від**[**складної функції**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%83%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D1%96%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D0%B9)

\left({u(v(x))}\right)' = {u_v'(v) \cdot v_x'(x)}

**Похідна від**[**оберненої функції**](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F)

(f^{-1})' =\frac{1}{f' \circ f^{-1}}

1. **Зв’язок диференційовності функції з неперервністю.**

Теорема 2**:** якщо у=у(х) - диференційована в точці , то вона неперервна в точці .

1. **Похідні nго порядку, формула Лейбниця.**

Похідною nго порядку функції називається похідна її похідної (n-1)го порядку: . Позначення через диференціали:

Формула Лейбніца**:** якщоU(x) iV(x) мають похідні до порядку nвключно, то

1. **Теорема Лагранжа та наслідки з неї.**

Теорема Логранжа: Якщо f – неперервна на [a;b], диференційована на (а;b), то

Ǝ c ∈ (a;b) ⇒ f(b)f(a) = f’(c)(b-a).

Наслідки з теореми Логранджа:

1) якщо f(x) – неперервна на [a;b], диференційована на (а;b), то f’(x)=0⇔f(x)=c (c-const);

2) (про монотонну функцію) якщо ∀ точках (а;b) f’(х) невід'ємна(недодатня), то f(х) – неспадна(незростаюча) функція

1. **Теорема Ролля та теорема Коші.**

Теорема Ролля: якщо f: [a;b]→R – неперервна на [a;b], диференційована на інтервалі[a;b] і f(a)=f(b), то ∃ с∊ (а;b):f’(c)=0.

Теорема Коші: нехай f(х) і g(х) - неперервні на [a;b], диференційовані на (а;b), при чому g’(х)≠0 ∀x∊(а;b). Тоді ∃ с∊(а;b):

1. **Многочлен Тейлора, формула Тейлора.**

Многочлен Тейлора:

якщо f(x) має в точці похідні до порядку nвключно (f(x)∊(a;b),∊(a;b), то вираз

називається многочленом Тейлора функції f(х) в точці .

Формула Тейлора:

Нехай f(x) – функція, – многочлен Тейлора функції f(х) в точці .

Якщо позначити різницю f(x) -= – залишок від функції f(x), то рівність

називається формулою Тейлора функції f(х) в точці .

1. **Формула Тейлора з остатковим членом в формі Лагранжа та Пеано.**

Формула Тейлора з залишковим членом в формі Логранжа:

Формула Тейлора з залишковим членом в формі Пеано:

1. **Формула Тейлора основних елементарних функцій.**

**ex=1++x2/2!....+хn/n!+0(xn)=**  \mathrm{e}^{x} = \sum^{\infin}_{n=0} \frac{x^n}{n!}

**Ln(x-1)=x-x2/2....+(-1)n+1\*хn/n+0(xn)=** \ln(1+x) = \sum^{\infin}_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n}

\sin x = \sum^{\infin}_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} =………+0(x2n+2)

\cos x = \sum^{\infin}_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} =…….+0(x2n+1)

(1+x)^\alpha = \sum^{\infin}_{n=0} {\alpha \choose n} x^n      для  \left| x \right| < 1\quad\mbox{ } і усіх комплексних  \alpha ; =……0(xn)

1. **Теорема Ферма та необхідні умови екстремума функції, критичні точки** функції.

Якщо f:=DR диференційована в т.x0 – внутрішнього екстремуму , то f ‘(x0)=0

З теореми Ферма: необхідна умова екстремума ф-ції:

Якщо в т. x0 (a,b) f(x) має екстремум то в цій точці :

1. F’(x0) - Не існує
2. F’(x0)=0 Такі точки називають критичними точками f(x).
3. **Достатні умови екстремума функції в термінах першої похідної.**

Якщо при переході через критичну точку x0 похідна міняє знак з + на - ⬄

т. х0-точка max.

1. **Достатні умови екстремума функції в термінах вищих похідних.**

Якщо в т. х0

F’(xo)= -х0 =…=f(n-1)( х0 )=0

F(n) ( х0 )0, то при n- непарне екстремума немає,а при n –парне є, причому

F(2k) ( х0 )>0 0 –точка min

F(2k) ( х0 )<0 0 –точка max

1. **Правило Лопіталя.**

Якщо при хх0 невизначеність виду {} або {} і , то

=

1. **Визначення опуклої вверх функції, її зв’язок з другою похідною.**

Визначення опуклої вниз функції, її зв’язок з другою похідною.

F(x) –опукла вниз(вверх) ⬄

Якщо х1х2(а;b)=>f(dx1+(1-d)x2)f(x1) +(1-d)f(x2) [0;1];

F’’(x)(>) на (а;b)=> f(x) опукла вниз на (a;b)

F’’(x)(<) на (а;b)=> f(x) опукла вверх на (a;b)